Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

01/11/2016

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^n$

Κάθε φραγμένη ακολουθία $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$. Το όριο της $(\bar{x}_{k_\nu})$ ονομάζεται σημείο συσσώρευσης της $(\bar{x}_\nu)$.

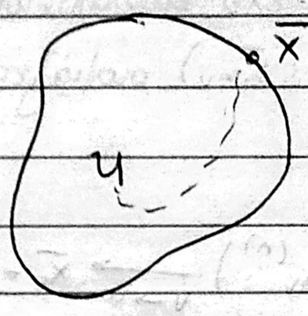
Απόδειξη: [Υπενθύμιση: $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \xrightarrow{\nu\to\infty} \bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$
$\Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,n: x_\nu^{(i)} \xrightarrow{\nu\to\infty} x_0^{(i)} \in \mathbb{R}$]

Αφού η $(\bar{x}_\nu)$ είναι φραγμένη, $\exists c>0 \; \|\bar{x}_\nu\| \le c \; \forall \nu\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall i = 1,\dots,n \quad |x_\nu^{(i)}| \le \|\bar{x}_\nu\| \le c \quad \forall \nu\in\mathbb{N}$
$\underset{\text{B-W στον } \mathbb{R}}{\Rightarrow} \exists x_{\ell_\nu^{(i)}} \xrightarrow{\nu\to\infty} x_0^{i}$ (*), όπου $\ell_\nu^{(i)}$ είναι μία υπακολουθία δεικτών
δηλαδή $\forall i = 1,2,\dots,n$, $0 < \underbrace{\ell_1^{(i)}}_{\in\mathbb{N}} < \underbrace{\ell_2^{(i)}}_{\in\mathbb{N}} < \dots$

Εμείς όμως θέλουμε μία υπακολουθία δεικτών ~~...~~
$(k_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset (\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ για όλα τα $i = 1,\dots,n$.
Αυτό προκύπτει σύμφωνα με το (*) $\exists (\ell_\nu^{(1)})$ με $x^{(i)}_{\ell_\nu^{(i)}} \to x_0^{(i)} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Αφού $(x^{(i)}_{\ell_\nu^{(i)}}) \subset (x_\nu^{(i)})$ είναι φραγμένη (ως υπακολουθία φραγμένης ακολουθίας) επιλέγω (B-W στον $\mathbb{R}$) μια $(\ell_\nu^{(2)}) \subset (\ell_\nu^{(1)})$ έτσι ώστε $x^{(2)}_{\ell_\nu^{(2)}} \xrightarrow{\nu\to\infty} x_0^{(2)} \in \mathbb{R}$, ενώ διατηρείται η σύγκλιση της ακολουθίας της πρώτης συντεταγμένης.
$x^{(1)}_{\ell_\nu^{(2)}} \xrightarrow{\nu\to\infty} x_0^{(1)}$ (αφού $(x^{(1)}_{\ell_\nu^{(2)}}) \subset (x^{(1)}_{\ell_\nu^{(1)}})$ και η τελευταία συγκλίνει.
Συνεχίζοντας έτσι, έχουμε τελικά μια υπακολουθία:
$$(\ell_\nu^{(n)}) \subset (\ell_\nu^{(n-1)}) \subset \dots \subset (\ell_\nu^{(1)})$$
Έτσι ώστε: $\forall i = 1,\dots,n \quad x^{(i)}_{\ell_\nu^{(n)}} \to x_0^{(i)} \in \mathbb{R}$.
δηλαδή $\bar{x}_{\ell_\nu^{(n)}} \to \bar{x}_0$.

Χαρακτηρισμοί Τοπολογικών συνόλων (και σημείων) με ακολουθίες:

Πρόταση ①: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\bar{x} \in U' \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\}$:
$\bar{x}_\nu \to \bar{x}$



Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ $\bar{x} \in U' \Leftrightarrow \bar{x}$ σ.σ. του $U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset \Rightarrow$
$\xRightarrow{\varepsilon = \frac{1}{\nu}} (\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists \bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\}) : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$

$(\Leftarrow)$ $\exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x} \Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0)(\forall \nu \geq \nu_0) \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \varepsilon}_{\Leftrightarrow \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}, \varepsilon)}$

Συνεπώς $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{x}_{\nu_0} \in U \setminus \{\bar{x}\} \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$
δηλαδή $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Πρόταση ②: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in U$. Τότε $\underbrace{\bar{x} \in \bar{U}}_{= U \cup U'} \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $\bar{U} = U \cup U'$
$(\Rightarrow)$ Αν $\bar{x} \in U$, τότε η $\bar{x}_\nu = \bar{x} \subset U$ συγκλίνει στο $\bar{x}$
Αν $\bar{x} \in \bar{U} \setminus U$, δηλ. $\bar{x} \in U'$ τότε από την Πρόταση ①
$\exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$
$(\Leftarrow)$ Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$. Αν $\exists \underbrace{\bar{x}_\nu}_{\in U} = \bar{x}$ τότε $\bar{x} \in U \subset \bar{U}$

Αν $\bar{x}_\nu \neq \bar{x}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ τότε θα έχουμε $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$
$\xRightarrow[\text{①}]{\text{πρόταση}} \bar{x} \in U' \subset \bar{U}$

Πρόταση ③ : $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in U$

Απόδειξη: (⇒) Έστω U κλειστό και $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Τότε από την Πρόταση ② και αφού $U = \bar{U}$ έχουμε $\bar{x} \in U$

(⇐) Θνδο : $\bar{U} \subset U$. Έστω $\bar{x} \in \bar{U}$.

Από πρόταση ② έχουμε : $\exists (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

Από την υπόθεση (στα δεξιά) έχουμε $\bar{x} \in U$

Πρόταση ④ : $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_n) \subset U \quad \exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x} \subset U : \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$

Απόδειξη: (⇒) Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$. Αφού το U είναι κλειστό και φραγμένο (δλδ. συμπαγές) έχουμε από το B-W στον $\mathbb{R}^n$

$\exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\xrightarrow{\text{πρόταση ③}} \bar{x} \in U$.

(⇐) Έστω ότι το U δεν είναι φραγμένο, δηλαδή

$(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists \bar{x}_\nu \in U) \quad \underbrace{\|\bar{x}_\nu\| \geq \nu}_{\Leftrightarrow \bar{x}_\nu \notin B(\bar{0}, \nu)} \Rightarrow \forall (x_{k_\nu}) \subset (x_\nu) : \quad \|\bar{x}_{k_\nu}\| \geq k_\nu \geq \nu$

η $(\bar{x}_{k_\nu})$ δεν είναι φραγμένη ⇒ η $(\bar{x}_{k_\nu})$ δεν είναι συγκλίνουσα).

κάτι το οποίο αντίκειται στην υπόθεση στα δεξιά

(δηλ. βρήκαμε μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu)$ για την οποία καμία υπακολουθία της δεν συγκλίνει.

Άρα το U είναι φραγμένο.

Θνδο U είναι κλειστό, δηλαδή (Πρόταση ③)

Θνδο $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$, $\bar{x} \in U$.

Έστω μία τέτοια ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu) : \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ Από υπόθεση στα δεξιά θα έχουμε $\bar{x} \in U$.

Παράδειγμα ①: $\{\bar{x}\}$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset \{\bar{x}\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{y}$

Θνδο $\bar{y} \in \{\bar{x}\}$. Αφού η μόνη δυνατή ακολουθία είναι η $\bar{x}_\nu = \bar{x}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ η οποία συγκλίνει στο $\bar{x}$ έχουμε $\bar{y} = \bar{x} \in \{\bar{x}\}$.

Παράδειγμα ②: SOS!!!!!

Νδο $\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \bar{x} \Rightarrow \underbrace{\|\bar{x}_\nu\|}_{\in\mathbb{R}} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \|\bar{x}\|$

$\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

$\big|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\|\big| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

Ισχύει αφού:

$\big|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\|\big| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\|$ ισχύει και αυτό.

Μόλις δείξατε ότι η συνάρτηση
$f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής.

Παράδειγμα ③: Κάθε σφαίρα είναι συμπαγής.

$S = \partial B(\bar{x}_0, r)$, $r > 0$. $S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}$.

Θνδο $S \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγής. Χρησιμοποιώ Πρόταση: $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγής $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ $\exists\, \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$ με $\bar{x} \in U$.

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset S$ τότε $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| = r$

Το S είναι φραγμένο. Συνεπώς (BW) $\exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$:
$\underbrace{\bar{x}_{k_\nu}}_{=\bar{y}_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Θνδο $\bar{x} \in S$ δηλ. $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r$

Έχουμε $\underbrace{\bar{y}_\nu}_{\in S} \to \bar{x}$, όπου $\|\bar{y}_\nu - \bar{x}_0\| = r$. Συνεπώς $\bar{y}_\nu - \bar{x}_0 \to \bar{x} - \bar{x}_0$ και $\|\bar{y}_\nu - \bar{x}_0\| = r$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|\bar{y}_\nu - \bar{x}_0\| \to \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r$.

Σύνοψη: Θ.δ.ο: $S=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x_0}\|=r\}$ είναι συμπαγής

$\downarrow$

Απόδειξη: (1) S είναι φραγμένο $[U\subset\mathbb{R}^n$ φραγμένο $\Leftrightarrow \exists c>0:$

$U\subset B(\bar{0},c) \Leftrightarrow \exists\, \tilde{c}=c+1>0 : U\subset B(\bar{0},\tilde{c})]$

$\forall \bar{x}\in S \quad \|\bar{x}-\bar{x_0}\|=r \Rightarrow \|\bar{x}\| = \|\bar{x}-\bar{x_0}+\bar{x_0}\| \leq \underbrace{\|\bar{x}-\bar{x_0}\|}_{=r}+\|\bar{x_0}\| <$

$< r+\|\bar{x_0}\|+1=c$, δηλαδή $S\subset B(\bar{0},c)$.

(2) S είναι κλειστό. Έστω $(\bar{x_\nu})\in S$ με $\bar{x_\nu}\to\bar{x}$ $\Leftrightarrow \bar{x_\nu}-\bar{x_0}\to\bar{x}-\bar{x_0}$

Θ.δ.ο $\bar{x}\in S$

$\xRightarrow{\text{Παράδειγμα } 2} \underbrace{\|\bar{x_\nu}-\bar{x_0}\|}_{=r} \to \underbrace{\|\bar{x}-\bar{x_0}\|}_{=r} \Leftrightarrow x\in S$

Παράδειγμα (4): Κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο·

$B=B(\bar{x_0},r)=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x_0}\|\leq r\}$.

Τότε (1) $\forall\bar{x}\in B: \|\bar{x}\|\leq\|\bar{x}-\bar{x_0}\|+\|\bar{x_0}\|\leq r+\|\bar{x_0}\|<r+\|\bar{x_0}\|+1=c$.

$\Rightarrow B\subset B(\bar{0},c)$

(2) Έστω $(\bar{x_\nu})\in B$ με $\bar{x_\nu}\to\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ Θ.δ.ο $\bar{x}\in B$

$\Rightarrow \bar{x_\nu}-\bar{x_0}\to\bar{x}-\bar{x_0} \xRightarrow{\text{Παράδειγμα } 2} \underbrace{\|\bar{x_\nu}-\bar{x_0}\|}_{\leq r} \to \underbrace{\|\bar{x}-\bar{x_0}\|}_{\leq r}$ (⊛)

⊛ $(a_\nu)\subset\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$a_\nu\to a\in\mathbb{R}$, $a_\nu\leq r\in\mathbb{R}$.

$\xRightarrow{\text{Παράδειγμα } 1} a\leq r$

Όριο και συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ και $\bar{x}_0$ σ.σ. του U, τότε λέμε ότι η f συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$ όταν το $\bar{x}$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$.

Συμβολικά $f(\bar{x}) \to l$ όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$

$\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to x_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to l$.

Παράδειγμα 1ο: Έστω ότι $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και έστω $\bar{x}_0$ κάποιο σημείο του $\mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$\forall (\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}_\nu\} \text{ με } \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \xRightarrow{\text{παράδειγμα ②}} f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0) = l$$

Ορισμός: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται συνεχής στο $x_0 \in U \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \in U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

συνεχής $:\Leftrightarrow f$ συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in U$.

συνεχής στο $A \subset U$ $:\Leftrightarrow f$ συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in A$

Παράδειγμα 2ο: Η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = \|\bar{x}\|$ είναι συνεχής.

Πράγματι $\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall (\bar{x}_\nu) \in \mathbb{R}^n$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $\|\bar{x}_\nu\| \to \|\bar{x}_0\|$

(όπως είδαμε και στο παράδειγμα ②)

~~Προφανώς~~

[Επίσης η f είναι συνεχής προφανώς και σε κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ $(A \neq \emptyset)$].

Παράδειγμα 3ο: όλες οι συναρτήσεις $f_i(\bar{x}) = x^{(i)}$, $\bar{x} = (\underbrace{x^{(1)}}_{\in \mathbb{R}}, \dots, \underbrace{x^{(n)}}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^n$

με $i = 1, \dots, n$ είναι συνεχείς.

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = x^{(i)} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall \bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \\ \forall (\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \text{ με } \bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \to \bar{x}_0 \end{cases}$$

Θ.δ.ο. $\underbrace{f_i(\bar{x}_\nu)}_{x_\nu^{(i)}} \to \underbrace{f_i(\bar{x}_0)}_{= x_0^{(i)}}$ $\forall i = 1, \dots, n$